Capitolul I

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1. Să de integreze ecuația diferențială de ordinul întâi liniară

$$y' - y\, tgx = \frac{1}{\cos\, x},\ y(0) = 0$$

Soluție: Ecuația omogenă atașată este: $y'\text{-}y\ tgx = 0$ sau $\frac{dy}{y} = tgx\, dx$ cu soluția $\ln y = -\ln\cos x + \ln C$ sau $y = \frac{C}{\cos x}$. Pentru rezolvarea ecuației neomogene considerăm pe y sub forma $y = \frac{C(x)}{\cos x}$; avem $y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$.

Înlocuind în ecuație obținem:

$$\frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$$

De unde: $C'(x) = 1$ și $C(x) = x + C$. Soluția generală a ecuației date va fi:

$$y = \frac{x + C}{\cos x}.$$

Soluția problemei Cauchy *y(0)=0* este *C=0*. Deci soluția particulară a ecuației diferențiale $y = \frac{x}{\cos x}$.

2. Să se integreze ecuația diferențială omogenă:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy},\ y(1) = 0$$

Soluție:

Folosind substituția $y = xt,\ y' = t + xt'$ obținem succesiv:

$$xt' + t = t + \frac{1}{t},\ xt' = \frac{1}{t},\ t\, dt = \frac{dx}{x},\ \frac{t^2}{2} = \ln|x| + C$$

de unde $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$. Punând condiția inițială $y(1) = 0$ obținem $C = 0$ şi soluția particulară cerută este $y^2 = 2x^2 \ln|x|$.

3. Să se integreze ecuația diferențială omogenă generalizată:

$$(3x\text{-}7y\text{-}3)y' + 7x\text{-}3y\text{-}7 = 0.$$

Soluție: Observăm că $\delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 40 \neq 0.$ Sistemul $\begin{cases} 3x - 7y - 3 = 0 \\ 7x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$ are soluția $x=1,\ y=0$. Substituția $x = 1+u,\ y = v$ implică $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ şi ecuația dată devine $(3u - 7v)\, v' + 7u - 3v = 0$.

Facem substituția $v = u{\cdot}z(u)$, ceea ce conduce la soluția generală $(z-1)^2(z+1)^5 u^7 = C$ sau $(y - x + 1)^2 (y + x + 1)^5 = C$.

4. Să se integreze ecuația diferențială a lui Bernoulli:

$$y' - \frac{1}{x} y = -2xy^2, \quad y(1) = 1.$$

Soluție: $\alpha = 2 \quad (y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha)$. Facem substituția $u = y^{1-\alpha}$ sau $u=y^{-1}$. Obținem $u' = -\frac{y'}{y^2}$ sau $y' = -\frac{u'}{u^2}$. Ecuația dată devine: $-\frac{u'}{u^2} - \frac{1}{xu} = -2x\frac{1}{u^2}$ sau $u' + \frac{u}{x} = 2x$ cu soluția generală $u = \frac{2x^2}{3} + \frac{C}{x}$. Soluția generală a ecuației este $y = \frac{1}{\frac{2x^2}{3} + \frac{C}{x}}$. Din condiția inițială deducem $C = \frac{1}{3}$, astfel că soluția particulară căutată este $y = \frac{3x}{2x^3 + 1}$.

5. Să se integreze ecuația diferențială a lui Riccati:

$$y' + y^2 \sin x = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}, \quad y_P = \frac{1}{\cos x}, \; y(0) = -2 .$$

Soluție: Substituția $y = y_P + \frac{1}{u}$ sau $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{u}$ conduce la ecuația liniară $u' - 2\, tgx \cdot u = \sin x$.

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale este $u = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3}$.

Deci soluția generală a ecuației date este $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$. Din condiția Cauchy $y(0)=-2$ rezultă $C = 0$ şi deci soluția particulară căutată este $y = -\frac{2}{\cos x}$.

6. Să se integreze ecuația diferențială de tip Clairaut:

$$y = xy' + y'^2$$

Soluție: Notând $y' = p$ ecuația devine $y = xp + p^2$. Derivând în raport cu x şi ținând seama de notația făcută, obținem $p = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$ sau $\frac{dp}{dx}(x + 2p) = 0$. Soluția generală este $y = Cx + C^2$, iar soluția singulară este $x=-2p$, $y = -p^2$ sau $y = -\frac{x^2}{4}$.

7. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți omogene:

a) $y'' - y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
c) $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
d) $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$
e) $y^{(4)} - y = 0$
f) $y^{(5)} + 4y^{(3)} = 0$

Soluție :

a) Ecuația caracteristică $r^2 - 1 = 0$ are rădăcinile reale şi distincte $r_1 = -1$, $r_2 = 1$. Soluția generală este $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

Din condițiile inițiale obținem $C_1 = C_2 = 1$ şi deci soluția particulară este $y = e^{-x} + e^x$.

b) Ecuația caracteristică $r^4 - 5r^2 + 4 = 0$ are rădăcinile reale distincte $r_1=-2$, $r_2=-1$, $r_3=1$, $r_4=2$. Soluția generală a ecuației diferențiale est

$$y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + C_3e^{x} + C_4e^{2x}.$$

c) Ecuația caracteristică $r^3-6r^2+11r-6=0$ are rădăcinile reale distincte $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=3$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

d) Ecuația caracteristică $r^3-3r^2+3r-1=0$ are rădăcinile reale multiple: $r_1=r_2=r_3=1$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{x}.$$

e) Ecuația caracteristică $r^4-1=0$ are rădăcinile $r_1=-1$, $r_2=1$, $r_3=-i$, $r_4=i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_4\cos x + C_5\sin x.$$

f) Ecuația caracteristică $r^5+4r^3=0$ are rădăcinile $r_1=r_2=r_3=0$, $r_4=-2i$, $r_5=2i$. Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\cos 2x + C_5\sin 2x.$$

8. Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordin superior cu coeficienți constanți neomogene:

$$a)\ y''-5y'+6y = 6x^2-10x+2$$
$$b)\ y^{(4)} - y^{(3)} - y' + y = e^{x}$$

Soluție: a) Ecuația caracteristică a ecuației omogene este $r^2-5r+6=0$ cu rădăcinile $r_1=2$, $r_2=3$. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Deoarece $r=0$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice căutăm soluția particulară sub forma $y_p = Ax^2+Bx+C$. Înlocuind y_p în ecuația neomogenă obținem:

$2A - 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C \equiv 6x^2 - 10x + 2$ de unde rezultă $A=1$, $B=C=0$ şi deci $y_p=x^2$. Soluția generală $(y = y_h+y_p)$ este:

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{3x} + x^2$$

b) Ecuația caracteristică $r^4-r^3-r+1=0$ are rădăcinile

şi deci

$$y_h = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-\frac{x}{2}}(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Deoarece $r=1$ este rădăcină dublă a ecuației caracteristice soluția particulară va avea forma $y_p = Ax^2e^x$. Rezultă $A=\frac{1}{6}$ şi $y_p=\frac{1}{6}x^2e^x$ iar soluția generală a ecuației neomogene $(y = y_h+y_p)$ este:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + e^{-\frac{x}{2}}(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{1}{6}x^2e^x.$$

9. Să se integreze ecuația de tip Euler:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x$$

Soluție: Folosim substituția $x=e^t$. Avem $y'=e^{-t}\frac{dy}{dt}$ şi $y''=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$. Ecuația dată devine: $\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^t$. Ecuația omogenă ataşată acestei ecuații are soluția generală $y_h = C_1e^t + C_2e^{2t}$, iar soluția particulară $y_p = -te^t$. Deci soluția generală a ecuației neomogene este $y = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t$ sau $y = C_1x + C_2x^2 - x\ln|x|$.

10. Să se integreze ecuația diferențială prin metoda variației constantelor

$$y'' + y = tgx$$

Soluție: Ecuația caracteristică a ecuației omogene este $r^2+1=0$ cu rădăcinile $r_1= -i$ şi $r_2 = i$. Soluția $y_h= C_1\cos x + C_2\sin x$. Considerăm soluția sub forma $y=C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$ (variația constantelor sau a lui Lagrange). Constantele $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ verifică sistemul:

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0 \\ -C'_1(x)\sin x + C'_2(x)\cos x = tgx \end{cases}$$

Soluția sistemului este: $C_1(x) = \sin x - \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_1$ şi

$C_2(x)$= $-\cos x + C_2$. Soluția generală a ecuației neomogene dată va fi:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

11. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} x' = -3x - y \\ y' = x - y \end{cases} \ , \ x = x(t) \ , \ y = y(t).$$

Soluție: Sin ecuația a doua $x = y' + y$, $x' = y'' + y'$. Înlocuind în prima ecuație obținem $y'' + 4y' + 4y = 0$. Ecuația caracteristică $r^2 + 4r + 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -2$. Soluția generală este $x(t) = (C_1 + C_2 - C_2 t)e^{-2t}$ şi $y(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-2t}$.

12. Să se integreze sistemul simetric de ecuații diferențiale:

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}$$

Soluție:

Sistemul dat poate fi scris sub forma:

$$\frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1} = \frac{dx_1 + dx_2 + dx_3}{0} = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{0}.$$

De aici rezultă că $d(x_1 + x_2 + x_3) = 0$ şi $x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0$. Soluția generală va fi formată din două integrale prime: $x_1 + x_2 + x_3 = C_1$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C_2$.

13. Să se integreze ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare:

$$\sqrt{x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sqrt{x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \sqrt{x_3}\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0, \qquad u\Big|_{x_3 = 1} = x_1 - x_2.$$

Soluție: Sistemul caracteristic $\frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} = \frac{dx_2}{\sqrt{x_2}} = \frac{dx_3}{\sqrt{x_3}}$ are integralele prime distincte: $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3} = C_1$ şi $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3} = C_2$.

Soluția generală a ecuației este:

$$u = \Phi(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3},\ \sqrt{x_2} - \sqrt{x_3}).$$

Pentru $x_3=1$ obținem $\sqrt{x_1} - 1 = C_1,\ \sqrt{x_2} - 1 = C_2,$ de unde $x_1 = (1+C_1)^2$, $x_2 = (1+C_2)^2$. Cu ajutorul condiției Cauchy obținem $u = (1+C_1)^2 - (1-C_2)^2$. Înlocuind pe C_1 şi C_2 găsim soluția ecuației date:

$$u = (1+\sqrt{x_1} - \sqrt{x_3})^2 - (1+\sqrt{x_2} - \sqrt{x_3})^2.$$

14. Să se integreze ecuația diferențială cu derivate parțiale cvasiliniară:

$$2x_1u\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2u\frac{\partial u}{\partial x_2} = u^2 - x_1^2 - x_2^2, \qquad u\Big|_{x_2=1} = x_1.$$

Soluție: Sistemul caracteristic este:

$$\frac{dx_1}{2x_1u} = \frac{dx_2}{2x_2u} = \frac{du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Din primele două ecuații găsim următoarea integrală primă: $\frac{x_1}{x_2} = C_1.$ Scriem sistemul caracteristic sub forma: $\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \frac{2u\,du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Alegând combinația integrabilă $2x_1,\ 2x_2,\ 1$ sistemul de mai sus poate fi scris astfel:

$$\frac{2x_1dx_1}{2x_1^2} = \frac{2x_2dx_2}{2x_2^2} = \frac{2u\,du}{u^2 - x_1^2 - x_2^2} = \frac{2x_1dx_1 + 2x_2dx_2 + 2u\,du}{x_1^2 + x_2^2 + u^2}$$

sau (prima şi ultima):

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{d(x_1^2 + x_2^2 + u^2)}{x_1^2 + x_2^2 + u^2},$$

şi integrala primă: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + u^2}{x_1} = C_2.$

Soluția generală a ecuației date este:

$$u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + u^2}{x_1}\right).$$

Pentru $x_2=1$, $u\Big|_{x_2=1}=x_1$ obținem: $x_1=C_1$ și $\frac{2x_1^2+1}{x_1}=C_2$

Înlocuind x_1 cu C_1 obținem între C_1 și C_2 relația:

$$\frac{2C_1^2+1}{C_1}=C_2$$

Revenind la valorile lui C_1 și C_2 din cele două integrale prime obținem:

$$\frac{2x_1^2+1}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2+u^2}{x_1}$$

de unde soluția generală a ecuației cvasiliniare date:

$$u^2=x_1^2-x_2^2+1.$$

Probleme propuse.

Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1. $y'+\frac{2}{x^2-1}y=2x+2,\ \ y(0)=-3$
2. $y'+\frac{2}{x}y=x^3$
3. $ydx\ +\ (2\sqrt{xy}-x)\ dy$
4. $2x^2y'=4xy-y^2,\ \ y(1)=1$
5. $y'=\frac{3x-4y+7}{4x-5y+11}$
6. $(3x+3y\text{-}1)dx+(x+y+1)dy=0$
7. $xy'+y=-x^2y^2,\ \ y(1)=1$
8. $y'+y^2+\frac{4}{x}y+\frac{2}{x^2}=0,\ \ y_p=\frac{a}{x}$
9. $y=xy'+\frac{1}{y'}$
10. $y=(1+y')x+y'^2$
11. *a)* $y''+2y'+y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1$

    b) $y^{(3)}-y''+y'-y=0$

    c) $y^{(4)}+2y^{(3)}+3y''+2y'+y=0$

    d) $y^{(5)}+y''=0$

12. $a)\ y'' - y' - 2y = 2x + 3$

$b)\ y^{(3)} - y'' = x,\ \ y(1) = 1, y'(1) = 0, y'(1) = -1$

$c)\ y'' - 7y' + 6y = \sin x + 3\cos x$

$d)\ y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}\cos x$

$e)\ y^{(4)} - 16y = 6e^{2x} + e^{-x} + 3\cos 2x + 2\sin 3x$

13. $a)\ x^2 y'' - xy' + y = 2x,\ \ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 1$

$b)\ x^3 y^{(3)} + 3x^2 y'' + xy' - y = x,\ \ y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$

14. $a)\ y'' - y = \dfrac{1}{\cos x}$

$b)\ y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{x}e^{x}$

15. $a)\ \begin{cases} x' = -2x - y + \sin t \\ y' = 4x + 2y + \cos t \end{cases},\quad x = x(t)\ ,\ y = \ y(t).$

$b)\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases},\quad \begin{array}{l} x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t) \\ x(0) = 1,\ \ y(0) = 1,\ \ z(0) = 0 \end{array}.$

16. a) $\dfrac{dx_1}{x_1(x_2 - x_3)} = \dfrac{dx_2}{x_2(x_3 - x_1)} = \dfrac{dx_3}{x_3(x_1 - x_2)}$

b) $\dfrac{dx_1}{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} = \dfrac{dx_2}{2x_1x_2} = \dfrac{dx_3}{2x_1x_3}$

c) $\dfrac{dx_1}{x_1} = \dfrac{dx_2}{x_2} = \dfrac{dx_3}{x_3 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$

17. $x_1(x_2 - x_3)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2(x_3 - x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3(x_1 - x_2)\dfrac{\partial u}{\partial x_3} = 0$

18. $a)\ x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = u,\ \ u\Big|_{x_1 = x_2} = x_1^3$

$b)\ x_1 u\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 u\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = -x_1x_2,\ \ u\Big|_{x_2 = 2} = x_1$